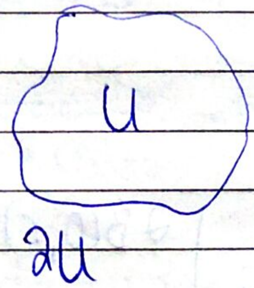
12/11/2020

Αρχή μεγίστου: $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ αρμονική, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο.

Τότε (i) ασθενής αρχή μεγίστου

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u \quad \Big[\max_{\bar{U}} u \geq \max_{\partial U} u, \text{ αυτό ισχύει}$$

$$\text{θ.ν.δ.ο. } \max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u \Big]$$



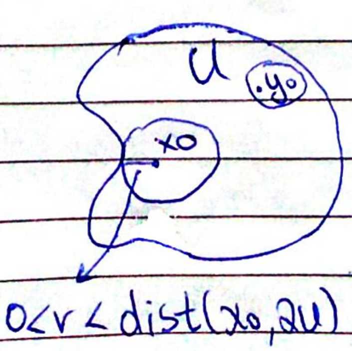
(ii) ισχυρή αρχή μεγίστου, αν επιπλέον U συνεκτικό, αν $\exists x_0 \in U$ $[= \operatorname{int} \bar{U}]$:

$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$, τότε $u =$ σταθερή στο $\bar{U}$ $(= u(x_0))$

<u>Απόδειξη</u> (ii) [μετά από το (ii) προκύπτει το (i)].

Έστω $x_0 \in U$ με $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u =: M$

Τότε $\forall\ 0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, έχουμε από την <u>ιδιότητα μέσης τιμής</u>



$$M = u(x_0) = ⨍_{B(x_0, r)} u \, dy \leq M \Longrightarrow$$

$$\fint_{\overline{B}(x_0,r)} u\,dy = M \Longrightarrow u(x) = M, \ \forall x \in \overline{B}(x_0,r)$$

[Έστω $y_0 \in B(x_0,r)$ με $u(y_0) < M$, τότε $(u \in C)$ $\fint_{B(x_0,r)} u\,dy < M$]

$\Longrightarrow$ το σύνολο $\{x \in U : u(x) = M\}$ είναι ανοικτό.

Από την άλλη, το σύνολο αυτό είναι σχετικά κλειστό στο U. [δηλ. $= U \cap \underbrace{\{x \in \overline{U} : u(x) = M\}}_{\text{κλειστό στον } \mathbb{R}^n}$].

$\Longrightarrow \{x \in U : u(x) = M\} = U$ ∎
U συνεκτικό $(\neq \emptyset)$

Έστω $u(y_0) < M$ για κάποιο $y_0 \in B(x_0,r)$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : u(y) < M, \ \forall y \in B(y_0,\varepsilon) \subset B(x_0,r)$

$$\Rightarrow M\,|B(x_0,r)| = u(x_0)\cdot|B(x_0,r)| =$$

$$\int_{B(x_0,r)} u\,dy = \int_{B(x_0,r)\setminus B(y_0,\varepsilon)} \underset{\leq M}{u}\,dy + \underbrace{\int_{B(y_0,\varepsilon)} u\,dy}_{\leq \underbrace{\max_{B(y_0,\varepsilon)} u}_{< M}\cdot|B(y_0,\varepsilon)|}$$

$$< M\underbrace{\left(|B(x_0,r)\setminus B(y_0,\varepsilon)| + |B(y_0,\varepsilon)|\right)}_{=|B(x_0,r)|} \cdot \underset{< M}{B(y_0,\varepsilon)} \Longrightarrow \text{αντίφαση}$$

(ii)⇒(i) Με απαγωγή σε άτοπο :

Έστω $\max_{\overline{U}} u > \max_{\partial U} u := \tilde{M}$

Τότε $\exists\, x_0 \in U : u(x_0) = \max_{\overline{U}} u > \tilde{M}$

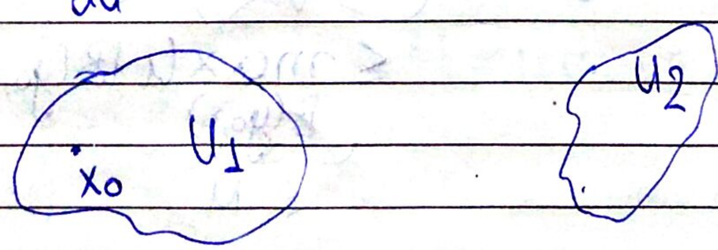
Έστω $U(x_0)$ η συνεκτική συνιστώσα του U που περιέχει το x_0 [δηλ. το μέγιστο ανοικτό υποσύνολο του U που είναι συνεκτικό και περιέχει το x_0, ένα, συνεκτ. υποσύνολο ανοικτό που περιέχει το x_0 είναι π.χ. $B(x_0,\varepsilon) \subset U$]. Τότε από το (ii) $u(x) = u(x_0)$, $\forall x \in \overline{U(x_0)}$

[$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u \geq \max_{\overline{U(x_0)}} u \geq u(x_0) \Rightarrow$

$u(x_0) = \max_{\overline{U(x_0)}} u$ και εφαρμόζουμε το (ii)]

$\Rightarrow u(x) = u(x_0)$ στο $\partial U(x_0) \subset \partial U \Rightarrow$

$\max_{\partial U} u \geq u(x_0)$, αντίφαση]



$U = U_1 \cup U_2$ $\quad U_1$ συνεκτ.

Εφαρμογή : $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένος τόπος (= ανοικτό + συνεκτικό) λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ) Dirichlet για την εξίσωση Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

[Από τα δεδομένα $g \in C(\partial U)$]

Αν $g \geq 0$ και $\exists\, x_0 \in \partial U : g(x_0) > 0$,

τότε $u(x) > 0$, $\forall x \in U$

με $g(x_0) > 0 \Rightarrow$
εδώ $u(x) > 0$, $\forall x \in U$

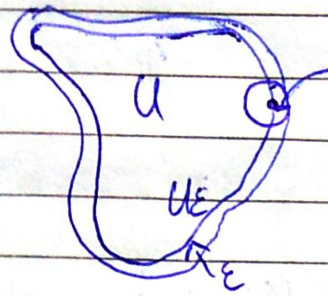
Θεώρημα 6, σελ. 28 Evans

$u \in C(U)$ με $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο και u έχει την ιδιότητα μέσης τιμής, δηλ. $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = \fint_{\overline{B}(x,r)} u(y)\, dy$, $\forall \overline{B}(x,r) \subset U$

Τότε $u \in C^\infty(U)$ [Συνεπώς αυτό ισχύει για u αρμονική στο U].

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ και $U_\varepsilon \subset U$

$$U_\varepsilon = \{x \in U : dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$$



$\forall x \in U_\varepsilon : B(x,\varepsilon) \subset U$

Τότε από ιδιότητες εξομάλυνσης $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(U_\varepsilon)$ και δείχνουμε $u = u^\varepsilon$ στο U_ε.

$\Longrightarrow u \in C^\infty$ στο U_ε $(\forall \varepsilon > 0)$

$\Longrightarrow u \in C^\infty(U)$. $\boxtimes$

Πράγματι, για $x \in U_\varepsilon$ έχουμε

$$u^\varepsilon(x) \underset{op}{=} \int_{\cancel{U}\ B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$B(x,\varepsilon)$ φορέας του $\eta_\varepsilon(x)$

$$\underset{\substack{op.\\ \text{του } \eta_\varepsilon}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \underbrace{\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}_{=\tilde{\eta}\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)} \cdot u(y)\, dy$$

[η η είναι ακτινική]

$$\underset{\text{«μεθ. χρ.»}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \underbrace{\tilde{\eta}\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)}_{=\tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)} u(y)\, dS(y)\, dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^{\varepsilon} \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \underbrace{\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)}_{= u(x) \cdot |B(x,r)|} dr$$

ιδιότ. μέσης τιμής

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^{\varepsilon} \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(x) \int_{\partial B(x,r)} 1\, dS(y)\, dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^{\varepsilon} \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(x) \cdot \underbrace{|B(x,r)|}_{= n \cdot a(n) \cdot r^{n-1}} dr$$

$$= |\partial B(0,r)| = \int_{\partial B(0,r)} 1\, dS(y)$$

$$= u(x) \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(y)\, dy}_{= 1 \text{, ορισμός κλπ.}}$$

$$= u(x) \int_0^{\varepsilon} \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) dS(y)\, dr$$

$$= u(x) \cdot \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(y)\, dy \quad \blacksquare$$

αμέσως χρησιμ. $\exists$ + ορ. του η_ε

Θεώρημα 7, σελ. 29 Evans, σχόλια για την απόδειξη

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = 0 \underset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow} \Delta u_{x_i} = 0 \Rightarrow$$

u_{x_i} αρμονική $\Rightarrow$ ισχύει για u_{x_i} ιδιότητα

μέσης τιμής $\Rightarrow |u_{x_i}(x_0)| = \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \left| \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i}(y)\,dy \right|$

$$\underset{\substack{\text{Θ. C2.1(i)} \\ \text{Evans}}}{=} \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \underbrace{\left| \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u \cdot \nu_i \, ds \right|}$$

$$\leq \int_{\partial B(0,\frac{r}{2})} |u| \cdot \underbrace{|\nu_i|}_{=1} ds$$

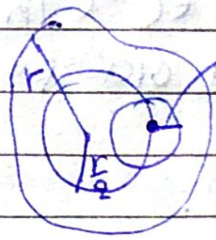
$$\Longrightarrow |u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial \ldots)} \underbrace{|\partial B(x_0,\tfrac{r}{2})|}_{= n\cdot\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow |u_{x_i}(x_0)| \leq n \cdot \frac{2}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \quad (*)$$

$|u| \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B(x,\frac{r}{2}))}, \ \forall y \in \partial B(x_0,\frac{r}{2})$

Επίσης, $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2}) \Longrightarrow$

$$\overline{B}\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{B}(x_0, r) \subset U$$



$$\Longrightarrow |u(x)| \le \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \left| \int_{B(x,\frac{r}{2})} u\,dy \right|$$

ιδιότητα μέσης τιμής

$\Longrightarrow \le \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$.

$$\Longrightarrow \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}$$

$\forall x \in \partial B(x, \frac{r}{2})$

$$\le \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

και με ⊛ έχουμε:

$$|u_{x_i}(x_0)| \le \frac{2n}{r} \cdot \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

για $|\alpha| = 1$ ☒

Εφαρμογή Θ.7: , σελ. 29, Evans

Θεώρημα Liouville (στον $\mathbb{R}^n$!!) :

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αρμονική (δηλ. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ και $\Delta u = 0$) και φραγμένη $\Rightarrow$ u σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Τότε (Θ.7):

$$|Du(x_0)| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\underbrace{u_{x_i}(x_0)}\big)^2 \Big)^{1/2}$$

$$\underset{\Theta.7.}{\leq} C_1 \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$\leq \frac{\sqrt{n} \cdot C_1}{r^{n+1}} \cdot \underbrace{\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}}$$

$$\leq \underbrace{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}_{<\infty} \cdot \underbrace{|B(x_0,r)|}_{=\alpha(n)\cdot r^n}$$

$$\leq \frac{\sqrt{n} \cdot C_1 \cdot \alpha(n)}{r} \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Longrightarrow$$

$Du(x_0) = 0, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ☒

Με εφαρμογή του Θ.7. προκύπτει και η αρμονική στο $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\Rightarrow$

$u \in C^{\omega}(U)$, δηλ. η αναλυτική στο U, δηλ. $\forall x_0 \in U$: $u(x_0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^{\alpha} u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)$

$(< \infty)$

$\forall x \in B(x_0, R)$, $R > 0$.

$[C^{\omega}(U) \subset C^{\infty}(U)]$.